

Дистанционный этап

9–11 классы

1. Робот-разведчик получил задание проникнуть в секретный бункер. Добравшись до входа в бункер, робот обнаружил, что дверь заперта и для ее открытия требуется ввести пятизначный цифровой код, зашифрованный в виде схемы, представленной на картинке (рис. 1), которую робот распознал при помощи системы технического зрения. За какое число попыток робот сможет гарантированно вскрыть бункер, считая, что различные цифры достоверно шифруются различными фигурами? Приведите все возможные варианты кода. Объясните ответ. (5 баллов)

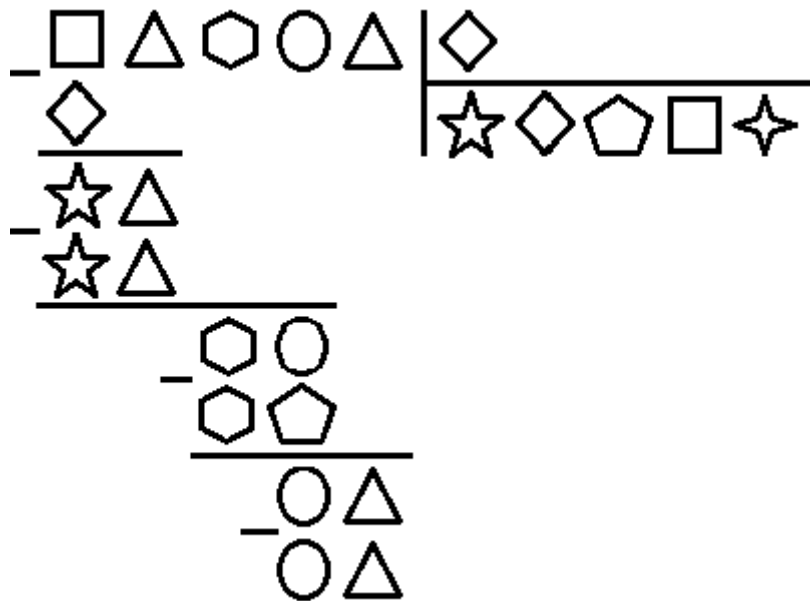


Рис.1

Ответ: 2 – 56236, 14059

Решение:

Прежде всего начнем с того, что сделаем некоторые наблюдения насчет значения определенных фигур.

Так как при умножении звездочки на ромбик получается ромбик, то звездочка шифрует 1.

Проанализируем данное выражение:

$$\begin{array}{r} \text{шестиугольник} \text{ } \text{шестиугольник} \\ - \text{шестиугольник} \text{ } \text{шестиугольник} \\ \hline \text{шестиугольник} \end{array}$$

Получается, что пятиугольник шифрует цифру 0.

При умножении ромбика на ромбик получается число, содержащее 1 десяток и треугольничек единиц. Среди квадратов чисел от 1 до 9 всего одно число больше 10 и меньше 20 – это число 16. Значит, треугольничек шифрует 6, а ромбик 4.

Так как квадратик на 1 больше, чем ромбик, то квадратик шифрует 5.

Произведение 4 и какого-либо однозначного числа, оканчивающегося на 6, равно или 16 или 36. Но нам известно, что разными символами шифруются разные цифры, значит, так как пятиконечной звездочкой шифруется 1, то круг не может шифровать 1, следовательно, круг шифрует 3. Чтобы получить 36, 4 нужно умножить на 9. Значит, четырехконечная звездочка шифрует 9.

Определим, какую цифру шифрует шестиугольник. Произведение 4 и 5 равно 20. Значит, шестиугольник шифрует цифру 2.

Получается, что мы имеем следующий пример:

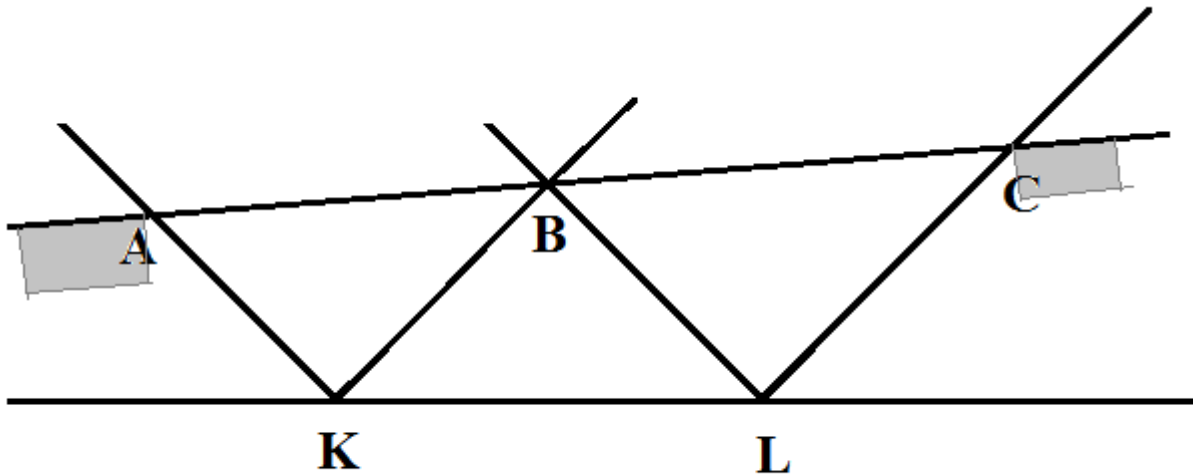
$$\begin{array}{r} \underline{\underline{56236}} \mid 4 \\ \underline{\underline{4}} \quad \quad \quad \mid 14059 \\ \underline{\underline{16}} \\ \underline{\underline{16}} \\ \underline{\underline{23}} \\ \underline{\underline{20}} \\ \underline{\underline{36}} \\ \underline{\underline{36}} \end{array}$$

Так как в условии не сказано, какое из пятизначных чисел считать кодом - делимое или частное, то робот гарантированно вскрыет бункер за 2 попытки. Варианты кодов: 56236 и 14059.

2. Автоматизированная система слежения за движущимися объектами состоит из двух ультразвуковых датчиков, направленных перпендикулярно к линии их расположения, с углом обзора 90° каждый. Датчики направлены в одну сторону так, чтобы внутренние границы обзора пересекались также под углом 90° . Расстояние между датчиками $10\sqrt{\frac{3}{2}}$ м. Система слежения зафиксировала, что объект двигался по прямой, пересекая линии границ обзора в точках А, В и С, где А – лежит на линии внешней границы обзора первого датчика, В – воображаемая точка пересечения линий внутренних границ обзора первого и второго датчика, С – линия внешней границы обзора второго датчика. Определите длину движущегося объекта, если от времени фиксации объекта в точке А до времени фиксации объекта в точке В прошло 10 с, АВ= 10 м, а определение движущегося объекта в точке С окончилось по истечении 18 с после момента начала его фиксации в точке В. **(15 баллов)**

Ответ: $18-10\sqrt{3}$ м

Решение:



Так как датчики расположены под прямым углом к линии их расположения и из предположения, что датчики детектируют сигналы симметрично, можно утверждать, что $\angle BKL = \angle BLK = 45^\circ$, то есть $\triangle KBL$ прямоугольный и равнобедренный.

$KL = 10\sqrt{\frac{3}{2}}$, т.к. $\triangle KBL$ прямоугольный и равнобедренный, то $KB = BL = 10\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{3}$.

Т.к. $AB = 10$, следовательно $\angle KAB = 60^\circ$, так как $\sin \angle KAB = \frac{KB}{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\triangle KBA$ подобен $\triangle LCB$, следовательно $\angle LBC = \angle KAB = 60^\circ$, тогда $BC = \frac{BL}{\cos \angle LBC} = 10\sqrt{3}$.

Так как от времени фиксации объекта в точке А до времени фиксации объекта в точке В прошло 10 секунд, то скорость движения объекта равна $10 \text{ м} : 10 \text{ с} = 1 \text{ м/с}$.

Так как $BC = 10\sqrt{3}$, а скорость движения объекта постоянна, то время, за которое начало объекта достигнет пункта С, равно $10\sqrt{3} \text{ с}$. Получается, что прохождение объектом точки С заняло $18 \text{ с} - 10\sqrt{3} \text{ с}$.

Зная, что скорость движения объекта равна 1 м/с , определим длину объекта: $18 - 10\sqrt{3} \text{ с} \times 1 \text{ м/с} = 18 - 10\sqrt{3} \text{ м}$.

Ответ: длина объекта равна $18 - 10\sqrt{3} \text{ м}$.

3. **Задача 3.** Робот выполнил программу:

X секунд на запад;

Повторить 5 раз:

A секунд на север;

B секунд на восток;

C секунд на юг;

D секунд на запад;

Конец повторить;

X секунд на юг;

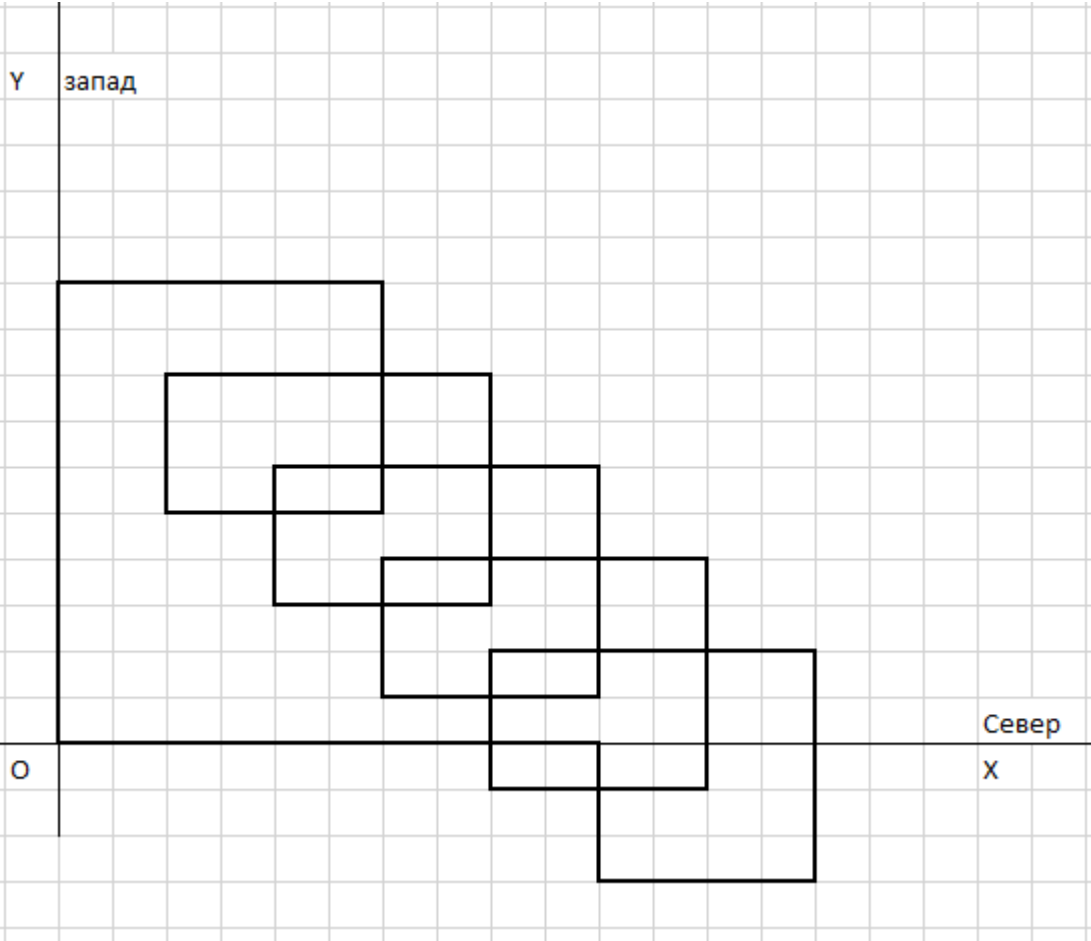
Конец

Известно, что A, B, C, D и X – целые числа, $15 > X > A > B > C > D$. Траектория движения робота представляет собой замкнутую, самопересекающуюся кривую. На весь путь робот затратил 110 секунд. Во время движения скорость робота постоянна и равна 1 м/с.

Изобразите траекторию движения робота.

Выберите оси так, чтобы вдоль оси OX изображалось движение на север, а вдоль оси OY – движение на запад. В качестве точки начала движения выберите начало координат. **(10 баллов)**

Ответ:



Решение:

Раз траектория движения робота представляет собой замкнутую кривую, то точки начала и конца движения совпадают.

Раз скорость движения робота постоянна на всем пути, то за равные промежутки времени робот проходит равные расстояния.

Обозначим скорость движения робота за $V > 0$.

Если учесть, что весь путь робот прошел за 110 секунд, то путь, пройденный роботом, за все время, можно выразить следующим образом:

$$XV + 5V(A + B + C + D) + XV = 110V$$

Разделим обе части уравнения на V , получим:

$$2X + 5(A + B + C + D) = 110$$

Выразив $A+B+C+D$ через X , получим:

$$A + B + C + D = 22 - \frac{2}{5}X$$

Так как $A > B > C > D$, то после каждого шага цикла робот будет сдвигаться на север на $(A-C)V$ и на восток на $(B-D)V$.

Так как траектория замкнутая, то после 5 повторений цикла робот перемещается на север на XV и на XV на восток.

Получается, что за 1 повторение цикла робот перемещается на $XV/5$ на север и на $XV/5$ восток.

Получаем, что

$$A - C = \frac{X}{5} \text{ и } B - D = \frac{X}{5}$$

Так как A, B, C, D и X – целые числа, то X должно делиться на 5 без остатка.

Оценим X .

Так как A, B, C, D, X выражают время движения, то эти переменные могут принимать только неотрицательное значение.

Так как $15 > X > A > B > C > D$, то $3 < X < 15$, и X кратно 5, то X может быть равно 5 или 10.

Рассмотрим $X=5$.

Тогда:

$$A + B + C + D = 22 - \frac{2}{5} \times 5 = 22 - 2 = 20$$

Так же:

$$A - C = \frac{5}{5} = 1 \text{ и } B - D = \frac{5}{5} = 1$$

То есть:

$$A = C + 1 \text{ и } B = D + 1$$

Подставим вместо переменных A и B выражения через C и D .

Тогда:

$$A + B + C + D = C + 1 + D + 1 + C + D = 2C + 2D + 2 = 20$$

То есть,

$$C = 9 - D$$

Подставив полученное выражение для C в выражение для A , получим:

$$A = 9 - D + 1 = 10 - D$$

Так как мы приняли $X=5$, то D , которое $D < C < B < A < 5$ и при этом является целым числом, может принимать только 2 значения – 0 или 1.

При $D=0$ имеем:

$$A = 10 - 0 = 10$$

Но, по условию $A < X$, то есть должно быть, что $A < 5$, значит, $D \neq 0$;

При $D=1$ имеем:

$$A = 10 - 1 = 9$$

Но, по условию $A < X$, то есть должно быть, что $A < 5$, значит, $D \neq 1$;

Значит, $X \neq 5$.

Рассмотрим $X=10$.

Тогда:

$$A + B + C + D = 22 - \frac{2}{5} \times 10 = 22 - 4 = 18$$

Так же:

$$A - C = \frac{10}{5} = 2 \text{ и } B - D = \frac{10}{5} = 2$$

То есть:

$$A = C + 2 \text{ и } B = D + 2$$

Подставим вместо переменных A и B выражения через C и D .

Тогда:

$$A + B + C + D = C + 2 + D + 2 + C + D = 2C + 2D + 4 = 18$$

То есть,

$$C = 7 - D$$

Подставив полученное выражение для C в выражение для A , получим:

$$A = 7 - D + 2 = 9 - D$$

То есть, мы получили систему уравнений для определения целочисленных коэффициентов:

$$\begin{cases} A = 9 - D \\ B = D + 2 \\ C = 7 - D \end{cases}$$

Определим ограничения, накладываемые на целочисленный параметр D .

Так как $A > B$, то

$$9 - D > D + 2$$

Решив данное неравенство, получим:

$$9 - 2 > 2D$$

$$2D < 7$$

$$D < 3,5$$

Так как D – целое число, то мы можем записать для него данное условие в виде:

$$D < 4$$

Так как $B > C$, то

$$D + 2 > 7 - D$$

$$2D > 5$$

$$D > 2,5$$

Так как D – целое число, то мы можем записать для него данное условие в виде:

$$D > 2$$

То есть, мы получили для D следующую оценку:

$$2 < 2,5 < D < 3,5 < 4$$

Для целочисленного D единственным решением данного неравенства будет $D=3$.

Тогда остальные параметры примут вид:

$$\begin{cases} A = 6 \\ B = 5 \\ C = 4 \\ D = 3 \end{cases}$$

Таким образом, наша программа имеет следующий вид:

10 секунд на запад;

Повторить 5 раз:

6 секунд на север;

5 секунд на восток;

4 секунды на юг;

3 секунды на запад;

Конец повторить;

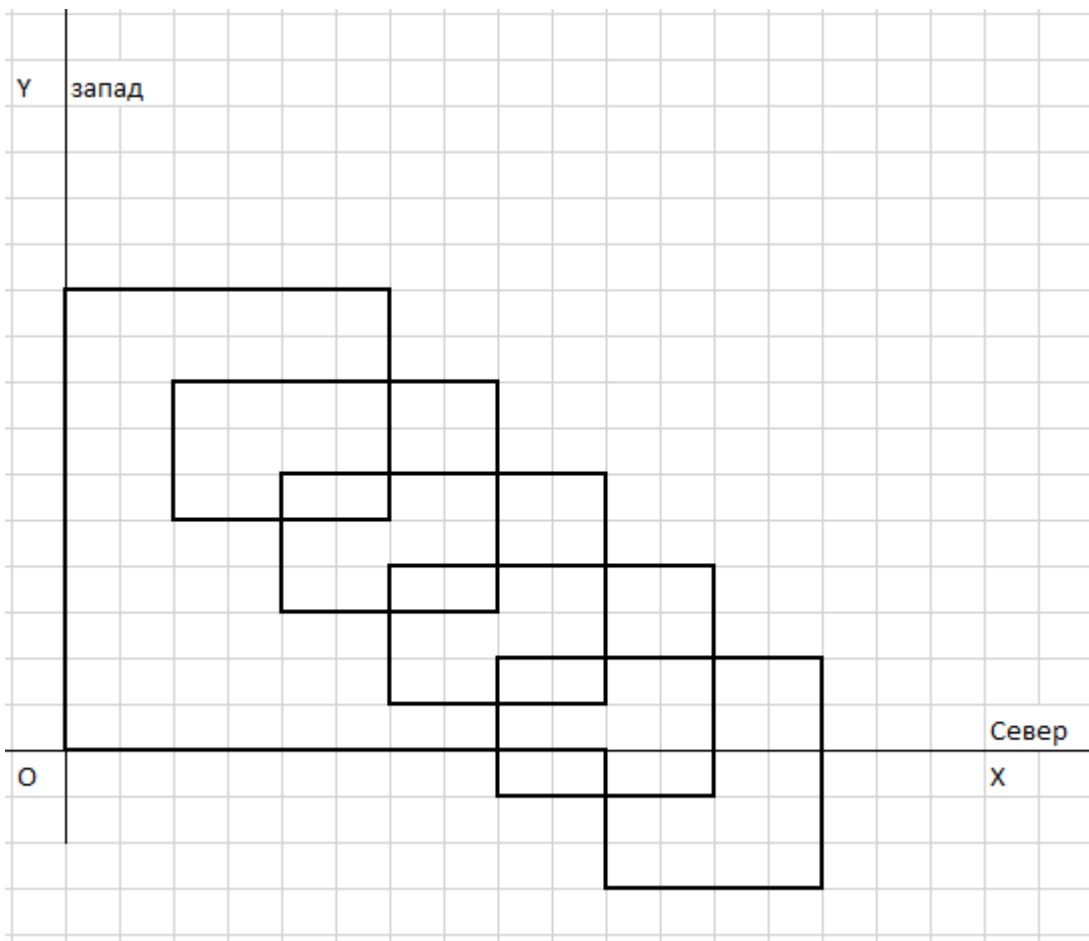
10 секунд на юг;

Конец

Изобразим траекторию движения робота. Выберем оси так, чтобы вдоль оси Ox у нас изображалось движение на север, а вдоль оси Oy – движение на запад. Выберем одинаковый масштаб для каждой из осей – $1 \text{ см} = 1 \text{ с} \cdot V \text{ м/с} = V \text{ м}$.

При $V=1 \text{ м/с}$, мы получим масштаб $1 \text{ см} = 1 \text{ м}$.

В качестве точки начала движения выберем начало координат.



Задача 4 При полной загрузке топливного отсека двигателя Дж-01 робот А1 может двигаться максимум 30 мин., при этом он преодолеет путь длиной 450 м. За счет замены двигателя робота на Дж-02 скорость робота возросла на 10%. Объем топливного отсека у двигателя Дж-01 на 20% больше, чем у двигателя Дж-02. Расход топлива моторами Дж-01 и Дж-02 одинаковые. Определите, сможет ли робот А1 после модернизации преодолеть путь в 400 м быстрее, чем за 25 минут? **(20 баллов)**

Ответ: да, робот сможет преодолеть 400 метров быстрее, чем за 25 минут.

Решение:

Чтобы определить, сможет ли робот преодолеть путь в 400 м быстрее, чем за 25 минут, нужно определить, хватит ли роботу топлива на то, чтобы проехать этот путь, и если хватит, то за какое время он его преодолеет.

Обозначим расход топлива двигателями Дж-01 и Дж-02 за k г/мин.

Так как при полной загрузенности топливного отсека робот может работать максимально 30 минут, то топливный отсек мотора Дж-01 вмещает:

$$30 \text{ мин} \times k \frac{\text{г}}{\text{мин}} = 30k \text{ г}$$

Так как объем топливного отсека мотора Дж-01 на 20% больше, чем у мотора Дж-02, то значит, что объем топливного отсека мотора Дж-02 на $\frac{2}{12}$ меньше, чем объем топливного отсека мотора Дж-01. Значит, в топливный отсек Дж-02 поместиться максимально

$$30k \text{ г} \times \frac{5}{6} = 25k \text{ г}$$

Определим максимальное время работы мотора Дж-02:

$$25k \text{ г} : k \frac{\text{г}}{\text{мин}} = 25 \text{ мин}$$

Среднепутевая скорость робота А1 с мотором Дж-01 равна:

$$450 \text{ м} : 30 \text{ мин} = 15 \text{ м/мин}$$

Так как замена двигателя Дж-01 на Дж-02 увеличила скорость робота на 10%, то скорость робота А1 после модернизации равна:

$$15 \frac{\text{м}}{\text{мин}} \times 1,1 = 16,5 \frac{\text{м}}{\text{мин}}$$

Определим, какой максимальный путь сможет преодолеть робот с двигателем Дж-02:

$$16,5 \frac{\text{м}}{\text{мин}} \times 25 \text{ мин} = 412,5 \text{ м}$$

Так как $412,5 \text{ м} > 400 \text{ м}$, то роботу хватит топлива, чтобы проехать 400 метров, значит, он сможет преодолеть 400 метров даже быстрее, чем за 25 минут, поскольку за 25 минут он преодолеет большее расстояние, чем 400 метров.

Ответ: да, робот сможет преодолеть 400 метров быстрее, чем за 25 минут.