

9–11 классы

1. Робот выезжает из стартовой зоны А размером 30 см×30 см. Через 120 см от внешней границы стартовой зоны установлен мяч, который робот должен сдвинуть с начальной скоростью 1 м/с. Масса робота 1 кг, максимальный момент одного мотора 0,1 Н×м, моторов два, радиус колеса 5 см, колёса вращаются в одном направлении.

Рассчитайте максимальное ускорение робота, считая, что начальная скорость равна нулю, ускорение максимально, столкновения абсолютно упругие. Рассчитайте время, за которое робот достигнет мяча.

С каким ускорением должен двигаться робот, чтобы толкнуть мяч с заданной скоростью через 4 секунды? (10 баллов)

Ответ: $a=1/2,4 \text{ м/с}^2$, $t=2,4 \text{ с}$.

Решение:

По формуле пройденного расстояния при равноускоренном движении

$$\text{найдем ускорение: } S = \frac{V_K^2 - V_H^2}{2a}; 2a = \frac{V_K^2 - V_H^2}{S}; a_1 = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2S_1} =$$

$$\frac{1 \text{ м}^2/\text{с}^2}{2,4 \text{ м}} = \frac{5}{12} \text{ м/с}^2$$

По формуле ускорения найдем время, за которое робот достигнет мяча:

$$a = \frac{V_K - V_H}{t}; t = \frac{V_K - V_H}{a}; t_1 = \frac{V_1 - V_0}{a_1} = \frac{1 \text{ м/с}}{\frac{5}{12} \text{ м/с}^2} = \frac{12}{5} \text{ с}$$

По формуле второго закона Ньютона проверим, не превосходит ли

получившиеся ускорение максимально возможное: $F = ma; \frac{M}{l} = ma;$

$$a = \frac{M}{lm}; a_2 = \frac{2M_1}{r_1 m_1} = \frac{0,2 \text{ Н*м}}{0,05 \text{ м*кг}} = 4 \text{ м/с}^2$$

$a_2 > a_1$ значит это ускорение подходит под параметры робота

Ответ:

$$\text{Ускорение робота } a_1 = \frac{5}{12} \text{ м/с}^2$$

$$\text{Время, за которое робот достигнет мяча } t_1 = \frac{12}{5} \text{ с}$$

2. Контроллер робота имеет «порт А» который по программе может подать/выключить сигнал +5В, с максимальной силой тока 0,1А. Один светодиод робота обладает следующими характеристиками: напряжение питания – 3В, максимальная сила тока 0,05А.

Рассчитайте сопротивление резистора, который необходим в рабочей схеме для обеспечения работы светодиода. (10 баллов)

Ответ: 40 Ом

Добавочное и ограничивающее сопротивление необходимо подключить последовательно со светодиодом. Чтобы задать уменьшение напряжение с 5В до 3В, необходимо рассчитать резистор для максимального тока 0.05 А
 $R=(5-3)/0.05= 40$ Ом. Значит, необходим резистор более 40 Ом.

3. Роботизированный водный транспорт развивает собственную скорость движения относительно воды 18 км/ч. Скорость течения реки – 2 м/с. Робот должен переправиться через реку шириной 220 м по кратчайшему пути. Сколько времени займёт переправа? (10 баллов)

Ответ: 48 с

Определите, под каким углом относительно берега должен двигаться робот, чтобы пересечь реку строго поперек (5 баллов)

Ответ: $\cos^{-1} \frac{2}{5}$

Решение:

$$V(\text{соб}) = 18 \text{ км/ч} = 5 \text{ м/с};$$

$$V(\text{теч}) = 2 \text{ м/с};$$

$$S = 220 \text{ м};$$

Найти:

а) $t = ?$

б) угол движения (\angle)

Решение:

а) 1. $\vec{V}(\text{отн}) = \vec{V}(\text{соб}) + \vec{V}(\text{теч})$.

$$2. V(\text{отн})^2 = V(\text{соб})^2 - V(\text{теч})^2$$

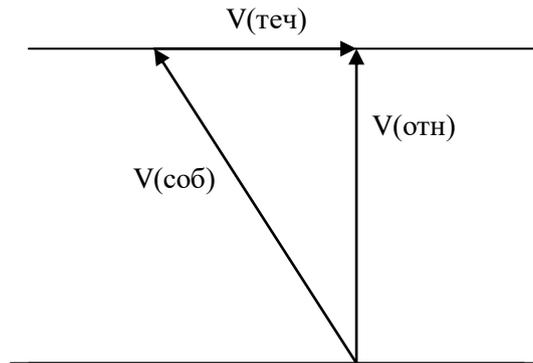
$$3. V(\text{отн}) = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} = 4.58$$

$$4. t = S / V(\text{отн}) = 220 / 4.58 = 48 \text{ с}$$

Ответ: 48 секунд.

б) $\angle = \arccos(V(\text{теч}) / V(\text{соб})) = \arccos(2/5)$

Ответ: $\arccos(2/5)$.

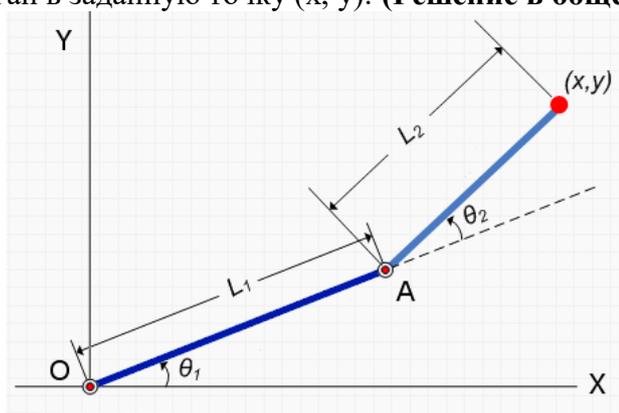


4. Манипулятор робота способен работать только в одной плоскости и имеет два звена. Первое звено **L1** закреплено на основании и повернуто на угол θ_1 относительно горизонтали OX, второе звено **L2** крепится к концу первого звена и повернуто относительно него на угол θ_2 . Рабочий орган манипулятора находится на конце второго звена.

Найдите углы θ_1 и θ_2 , которые позволят манипулятору с длиной звена $L_1 = 13$ см и длиной звена $L_2 = 5$ см поместить рабочий орган в заданную точку с координатами (9, 15). (Частное решение – 10 баллов).

Ответ: $\sin \theta_1 = 3/5$, $\sin \theta_2 = 33/65$

Найдите такие углы θ_1 и θ_2 , которые позволят манипулятору с плечом L_1 и локтем L_2 поместить рабочий орган в заданную точку (x, y). (Решение в общем виде – 15 баллов)



Решение в частном виде:

$$13^2 = 12^2 + 5^2$$

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$5 + 4 = 9, 12 + 3 = 15$$

Точка A может иметь координаты (5, 12), тогда $\sin \theta_1 = 12/13$, $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 3/5$

Второе частное решение:

Проведём прямую В, соединяющую начало координат О с заданной точкой (9, 15).

$$B^2 = 9^2 + 15^2 = 306$$

$$B \approx 17,5$$

$$x = B \cdot \cos(q_1) = 17,5 \cdot 9/17,5 = 9$$

$$y = B \cdot \sin(q_1) = 17,5 \cdot 15/17,5 = 15$$

q_1 — угол между осью OX и прямой В

q_2 — угол между прямой В и плечом L_1

отсюда:

$$Q_1 = q_1 - q_2$$

$$q_1 = \arccos(x/B) = \arccos(9/17,5) \approx \arccos(0,51) \approx 59 \text{ гр.}$$

по теореме косинусов:

$$L2^2 = B^2 + L1^2 - 2*B*L1*\cos(q2)$$

$$q2 = \arccos((L1^2 - L2^2 + B^2) / (2*B*L1)) = \arccos((13^2 - 5^2 + 306 / (2*17,5*13))) \approx \arccos(0,99) \approx 8 \text{ гр.}$$

$$Q1 = q1 - q2 \approx 51 \text{ гр.}$$

$$B^2 = L1^2 + L2^2 - 2*L1*L2*\cos(180 - Q2)$$

$$Q2 = 180 - \arccos((L1^2 + L2^2 - B^2) / (2*L1*L2)) = 180 - \arccos(0,86) \approx 30 \text{ гр.}$$

$$Q1 = 59 \text{ гр.}$$

$$Q2 = 30 \text{ гр.}$$

Решение в общем виде:

Проведём прямую В, соединяющую начало координат О с заданной точкой (х, у).

$$B^2 = x^2 + y^2$$

$$x = B*\cos(q1)$$

$$y = B*\sin(q1)$$

q1 — угол между осью ОХ и прямой В

q2 — угол между прямой В и плечом L1

отсюда:

$$Q1 = q1 - q2$$

$$q1 = \arccos(x/B) \text{ или } q1 = \arctg(y/x)$$

по теореме косинусов:

$$L2^2 = B^2 + L1^2 - 2*B*L1*\cos(q2)$$

$$q2 = \arccos((L1^2 - L2^2 + B^2) / (2*B*L1))$$

$$Q1 = q1 - q2 = \arccos(x/B) - \arccos((L1^2 - L2^2 + B^2) / (2*B*L1))$$

$$B^2 = L1^2 + L2^2 - 2*L1*L2*\cos(180 - Q2)$$

$$Q2 = 180 - \arccos((L1^2 + L2^2 - B^2) / (2*L1*L2))$$

Также возможен вариант, при котором $Q1 = q1 + q2$, а $Q2$ нужно брать с противоположным знаком.