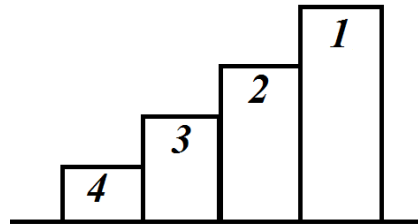


**МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
ПО РОБОТОТЕХНИКЕ  
2021–2022 уч. г. Очный этап  
Теоретический тур  
10–11 классы**

**Задание № 1 (5 баллов)**

На соревнованиях роботы Альфа, Бета, Гамма и Дельта заняли первые четыре места на пьедестале (см. схему пьедестала).



*Схема пьедестала*

Известно, что:

- Альфа заняла на соревнованиях не третье место.
- Два робота заняли места на пьедестале между Гаммой и Дельтой.
- Один из роботов занял одно место на пьедестале между Альфой и Гаммой.

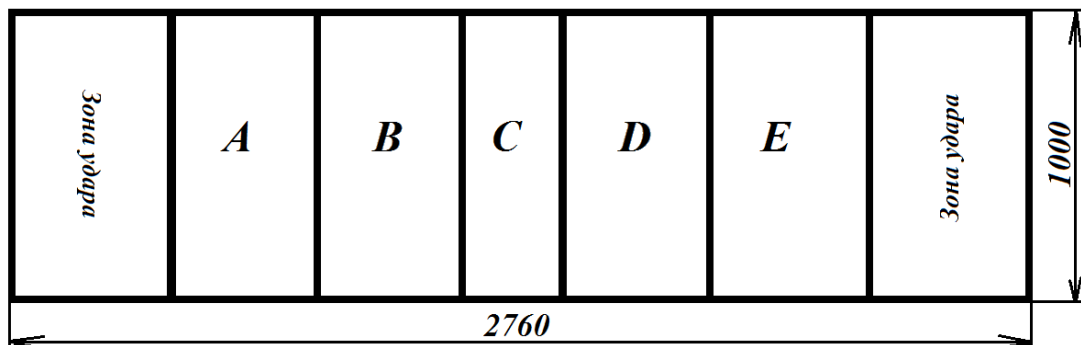
Какие места заняли роботы на соревнованиях?

**Задание № 2 (5 баллов)**

На соревнованиях по робохоккею робот должен так бить по шайбам, чтобы они попали в зону с наибольшим числом очков.

**1. Поле.**

Поле для этих соревнований имеет вид прямоугольника размером 2 м 76 см на 1 м, разделённого на семь зон (см. схему поля). Размеры на схеме даны в миллиметрах.



*Схема поля*

Зоны A, B, D, E и зоны удара имеют одинаковые размеры. Зона C в два раза уже, чем зона B. Толщина линии разметки по всему полю одинаковая и равна 2 см.

## 2. Игровые элементы.

Игровые элементы представляют собой деревянные шайбы радиусом 5 см и толщиной 1,5 см. В каждом раунде используется 3 шайбы.

## 3. Жеребьёвка.

Какая из зон удара будет использована на каждой из попыток, определяется с помощью жеребьёвки непосредственно перед попыткой после сдачи всех роботов в карантин. Во время попытки зона удара не меняется.

## 4. Попытка.

До начала попытки оператор устанавливает робота и шайбу в зоне удара, определённой жеребьёвкой произвольным образом, так, чтобы никакая часть робота и шайбы не выходила за пределы зоны удара. Чёрные линии не являются частью зоны удара.

На каждую попытку даётся три шайбы.

Во время попытки робот должен нанести удар по шайбе таким образом, чтобы шайба начала скользить в направлении зоны *C*. Робот не может использовать для удара части, которые после удара отделяются от него.

Во время попытки оператор может установить каждую из шайб только один раз. Шайба должна быть установлена на свою плоскую сторону. После удара оператор не имеет права касаться шайбы до конца попытки.

Робот может ударять по шайбе, только если он и шайба полностью находятся в зоне удара. Между ударами можно менять положение робота в зоне удара.

Количество ударов, которое может совершить робот за одну попытку, не ограничено.

На одну попытку отводится 2 минуты. Участник может отказаться от продолжения попытки в любой момент.

## 5. Подсчёт баллов.

После того, как попытка завершилась и все шайбы остановились, происходит подсчёт очков, заработанных роботом (см. *таблицу оценки*).

Зоны	<i>A</i> и <i>E</i>	<i>B</i> и <i>D</i>	<i>C</i>
Баллы	5	10	20

*Таблица оценки*

Чёрные линии, ограничивающие поле, являются его частью. Линии, разделяющие зоны поля, считаются относящимися к зонам с меньшим числом очков. Если шайба находится сразу в нескольких зонах, то за неё баллы присуждаются по зоне с наименьшим числом баллов. Если шайба (часть шайбы) находится вне зон *A*, *B*, *C*, *D*, *E* (т. е. касается поля вне этих зон), то за неё дают 0 баллов.

Робот Миши только что закончил попытку.

Шайбу № 1 Миша установил так, что центр шайбы оказался на расстоянии 10 см от ближайшей границы линии, разделяющей зону удара и зону *A*. После удара шайба № 1 переместилась на 35 см. Удар был нанесён так, что шайба двигалась перпендикулярно линиям, разделяющим зоны.

Шайбу № 2 Миша установил так, что центр шайбы оказался на расстоянии 6 см от ближайшей границы линии, разделяющей зону удара и зону *A*. После удара шайба № 2 переместилась на 52 см. Удар был нанесён так, что шайба двигалась перпендикулярно линиям, разделяющим зоны.

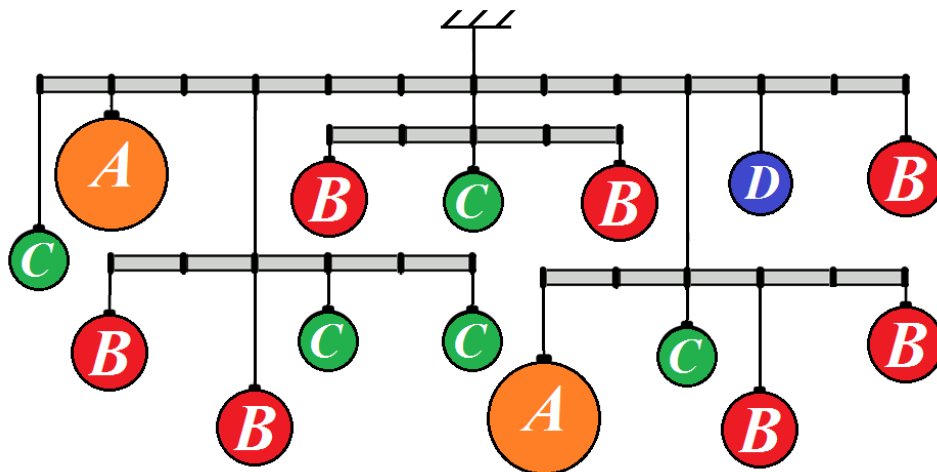
Шайбу № 3 Миша установил так, что центр шайбы оказался на расстоянии 7 см от ближайшей границы линии, разделяющей зону удара и зону *A*. После удара шайба № 3 переместилась на 74 см. Удар был нанесён так, что шайба двигалась перпендикулярно линиям, разделяющим зоны.

Расстояние при старте указано от края линии до центра каждой из шайб. Считайте, что во время попытки шайбы не касались друг друга.

Определите, сколько очков он заработал за эту попытку, если все три шайбы не переместились за границы поля. Приведите подробное обоснование вашего ответа.

### Задание № 3 (10 баллов)

Даша взяла четыре лёгкие (невесомые) прочные твёрдые ровные балки и нанесла на них разметку с помощью маркера, разделив каждую из них на несколько равных частей. Скрепив балки и прикрепив к ним несколько шариков (см. схему), девочка подвесила получившуюся конструкцию к потолку, после чего все балки заняли горизонтальное положение.

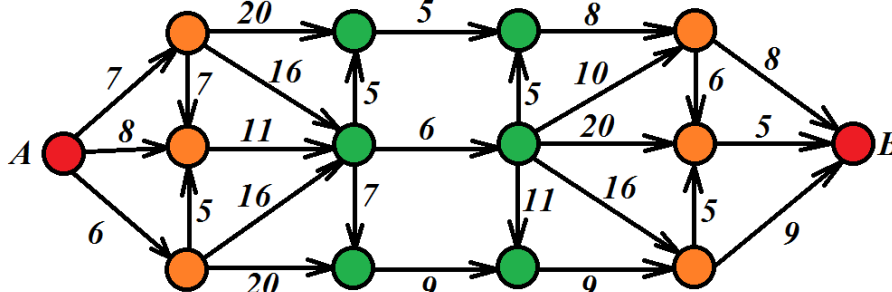


Схема

У Даши были шарики четырёх типов. На схеме они обозначены одинаковыми буквами. Все шарики одного типа имеют одинаковую массу. Масса шарика *D* равна 65 г. Определите, чему равна масса одного шарика *A*. Ответ дайте в граммах. Приведите подробное решение данной задачи.

### Задание № 4 (10 баллов)

Робот должен проехать от старта (точка  $A$ ) до финиша (точка  $B$ ) по линиям, попутно собирая кольца, развешенные по всему пути. Линии, связывающие старт с финишем, показаны на схеме (см. схему).

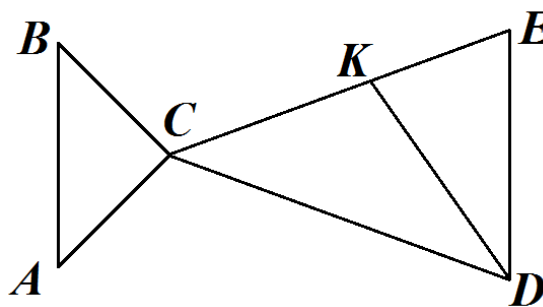


Схема

По регламенту движение по линиям разрешено только в указанных направлениях. Цифрами на схеме обозначено количество колец, которое робот может собрать на данном участке. Менять направление движения можно только на перекрёстках, обозначенных кругами. Какое наибольшее число колец может собрать робот за один проезд, соответствующий регламенту? Приведите подробное решение данной задачи.

### Задание № 5 (15 баллов)

Робот-чертёжник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение (см. траекторию) при помощи кисти, закреплённой посередине между колёс.



Траектория

Траектория представляет собой два треугольника  $ABC$  и  $DEC$  и отрезок  $DK$ . Биссектрисы  $\angle ACB$  и  $\angle DCE$  лежат на одной прямой. Известно что,  $CD = CE$ ,  $AC = BC$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle DCE = 40^\circ$ ,  $DK$  – биссектриса  $\angle CDE$ .

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, расстояние между центрами колёс (ширина колеи) составляет 16 см, радиус колеса робота 6 см. Все повороты робот должен совершать на месте, вращая колёса с одинаковой скоростью в противоположных направлениях. Из-за крепления кисти робот не может ехать назад. Робот должен проехать по каждому отрезку траектории ровно по одному разу.

Определите минимальный суммарный угол поворота робота, на который он должен повернуться при проезде по всей траектории. Ответ дайте в градусах. Приведите подробное решение задачи.

*Справочная информация*

*Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление поворотов робота не учитывается.*

### Задание № 6 (15 баллов)

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиус каждого из колёс робота равен 6 см. Левым колесом управляет мотор *A*, правым колесом управляет мотор *B*. Колёса напрямую подсоединены к моторам (см. *схему робота*). Посередине между центрами колёс находится маркер. Расстояние между центрами колёс (ширина колеи) робота равно 24 см. Моторы на роботе установлены так, что если обе оси повернутся на  $180^\circ$ , то робот проедет прямо вперёд.

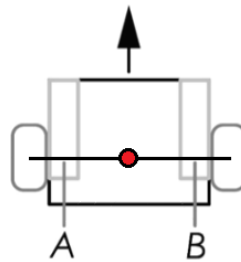


Схема робота

Робот вычерчивает кривую, состоящую из нескольких частей. При этом он последовательно выполнил следующие действия:

- 1) Ось мотора *A* повернулась на  $720^\circ$ , ось мотора *B* повернулась на  $720^\circ$ .
- 2) Ось мотора *A* повернулась на  $-180^\circ$ , ось мотора *B* повернулась на  $180^\circ$ .
- 3) Ось мотора *A* повернулась на  $360^\circ$ , ось мотора *B* повернулась на  $360^\circ$ .
- 4) Ось мотора *A* повернулась на  $-180^\circ$ , ось мотора *B* повернулась на  $180^\circ$ .
- 5) Ось мотора *A* повернулась на  $360^\circ$ , а ось мотора *B* повернулась на  $0^\circ$  (колесо *B* было зафиксировано).
- 6) Ось мотора *A* повернулась на  $180^\circ$ , ось мотора *B* повернулась на  $-180^\circ$ .
- 7) Ось мотора *A* повернулась на  $360^\circ$ , ось мотора *B* повернулась на  $360^\circ$ .

**А) (7 баллов)** Изобразите кривую, которую начертил робот, сохранив пропорции.

**Б) (8 баллов)** Определите, какой длины кривую начертил робот. Ответ дайте в сантиметрах, приведя результат с точностью до десятых. При расчётах примите  $\pi \approx 3,14$ .

Приведите подробное решение задачи. Чтобы получить более точный результат, округление стоит производить только при получении финального ответа.

## Решения и ответы

### № 1

**Ответ:** Дельта – 1-е место, Альфа – 2-е место, Бета – 3-е место, Гамма – 4-е место.

### № 2

Для определённости предположим, что удары совершались из левой зоны удара. Для правой зоны удара решение будет точно таким же.

Рассчитаем ширину каждой из зон поля. Так как зоны **A**, **B**, **D**, **E** и зоны удара имеют одинаковую ширину, а зона **C** в два раза уже, чем зона **B** и общая ширина поля равна 276 см, то получим, что ширина зоны **C** равна:

$$(276 - 8 \cdot 2) : 13 = 20 \text{ (см)}$$

Получим, что зоны **A**, **B**, **D**, **E** имеют одинаковую ширину 40 см, а зона **C** – ширину 20 см.

Рассчитаем, в какой зоне окажется центр первой шайбы после остановки:

$$35 - 10 - 2 = 23 \text{ (см) после границы зоны } A$$

$$23 - 40 = -17 \text{ (см) не хватает до границ зоны } B$$

Так как радиус шайбы 5 см, то от края шайбы до границы зоны **B** будет равно:

$$17 - 5 = 12 \text{ (см)}$$

Шайба № 1 окажется в зоне **A**. За неё начисляется 5 баллов.

Рассчитаем, в какой зоне окажется центр второй шайбы после остановки:

$$52 - 6 - 2 = 44 \text{ (см) после границы зоны } A$$

$$44 - 40 - 2 = 2 \text{ (см) после границы зоны } B$$

$$2 - 40 = -38 \text{ (см) не хватает до границ зоны } C$$

Так как радиус шайбы 5 см, то от края шайбы до границы зоны **B** будет равно:

$$2 - 5 = -3 \text{ (см)}$$

То есть шайба № 2 окажется на границе между зонами **A** и **B**. Это засчитывается так, что шайба № 2 находится в зоне **A**. За неё начисляется 5 баллов.

Рассчитаем, в какой зоне окажется центр третьей шайбы после остановки:

$$74 - 7 - 2 = 65 \text{ (см) после границы зоны } A$$

$$65 - 40 - 2 = 23 \text{ (см) после границы зоны } B$$

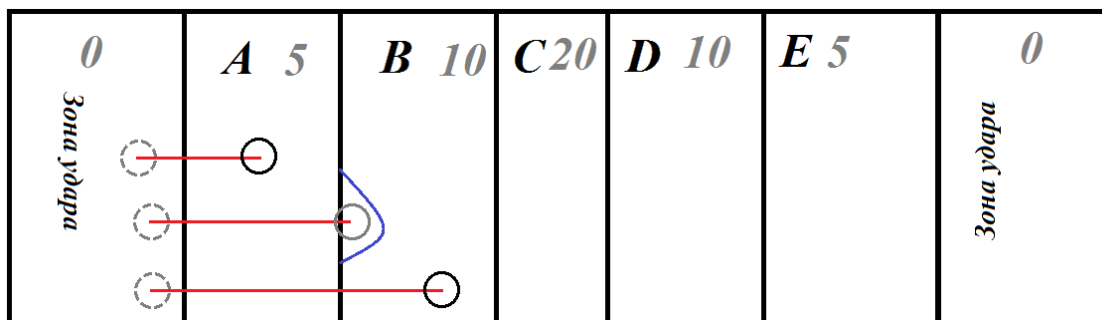
$$23 - 40 = -17 \text{ (см) не хватает до границ зоны } C$$

Так как радиус шайбы 5 см, то от края шайбы до границы зоны **B** будет равно:

$$23 - 5 = 18 \text{ (см)}$$

Шайба № 3 окажется в зоне **B**. За неё начисляется 10 баллов.

Изобразим графически полученный результат:



Общее число баллов за эту попытку будет равно:  
 $5 + 5 + 10 = 20$  (баллов).

**Ответ:** 20 баллов.

### № 3

Чтобы определить массы шариков, необходимо записать условие равновесия рычага:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}, \text{ где } F = mg$$

Обозначим  $x$  массу шарика  $C$ . Составим уравнения равновесия для системы. Так как по условию балки разделены на равные части, то мы можем пренебречь их длинами, учитывая только соотношения частей.

Для простоты в уравнениях опустим ускорение свободного падения.

Получим следующие уравнения:

$$2A = B + 3B$$

$$2B = x + 3x$$

$$6x + 5A + 3(2B + 2x) + 0(2B + x) = 3(A + 2B + x) + 4 \cdot 65 + 6B$$

Решив данную систему уравнений, получим, что

$$x = 52$$

Тогда масса шарика  $A$  будет равна:

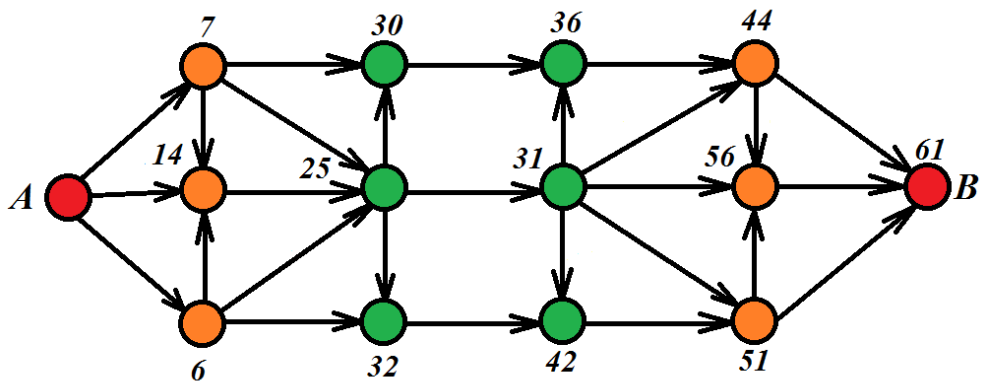
$$52 \cdot 4 = 208$$

**Ответ:** масса шарика  $A$  равна 208 г.

### № 4

На схеме представлен направленный граф. Нам надо найти путь максимальной длины из вершины  $A$  в вершину  $B$ . Учтём, что может существовать более одного пути максимальной длины и что нас устроит любой из них.

Будем перемещаться по графу слева направо, помечая каждую вершину числом, которое указывает максимальный путь от точки старта  $A$  до текущей вершины. Пройдя таким образом по всем вершинам графа и пометив их все, мы получим в качестве метки для вершины  $B$  максимальное количество колец, которое можно собрать при движении из вершины  $A$  в вершину  $B$ .

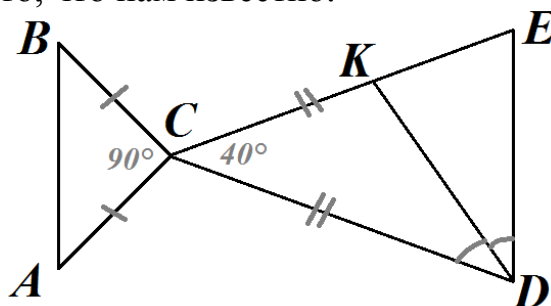


Таким образом, можно показать, что робот может собрать 61 кольцо.

**Ответ:** 61 кольцо.

**№ 5**

Отметим на чертеже то, что нам известно:



Определим градусные величины оставшихся углов.

Треугольник  $ABC$  – равнобедренный.

Так как сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , то:

$$\angle ABC = \angle CAB = (180^\circ - 90^\circ) : 2 = 45^\circ$$

Треугольник  $CED$  – равнобедренный.

Так как сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , то:

$$\angle CED = \angle CDE = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$$

Так как  $DK$  – это биссектриса, то

$$\angle CDK = \angle KDE = 70^\circ : 2 = 35^\circ$$

Так как сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , то:

$$\angle CKD = 180^\circ - (\angle KCD + \angle KDC) = 180^\circ - (40^\circ + 35^\circ) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

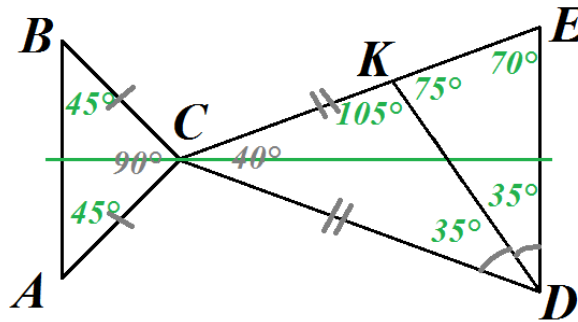
$\angle CKD$  и  $\angle DKE$  – смежные углы, значит, по свойству смежных углов:

$$\angle DKE = 180^\circ - \angle CKD = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

Изобразим линию, на которой лежат биссектрисы углов  $\angle ACB$  и  $\angle DCE$ .  
 Можно заметить, что треугольники  $ACB$  и  $DCE$  расположены симметрично относительно линии биссектрис углов  $\angle ACB$  и  $\angle DCE$ .

Отметим на чертеже найденные нами градусные меры углов:





Есть две вершины, из которых выходит нечётное число отрезков. Значит, траекторию можно объехать, выехав из одной из них и финишировав в другой. Это вершины **K** и **D**.

Если робот стартует из другой вершины, то он не сможет выполнить условие объехать всю траекторию, проехав по каждому отрезку ровно по одному разу. Расчёты показывают, что минимальный угол поворота получается при старте из вершины **K**.

Посчитаем минимальный угол поворота робота:

$$2 \cdot (180^\circ - 45^\circ) + (180^\circ - 70^\circ) + 2 \cdot (45^\circ - 20^\circ) + (180^\circ - 35^\circ) = \\ = 2 \cdot 135^\circ + 110^\circ + 2 \cdot 25^\circ + 145^\circ = 270^\circ + 110^\circ + 50^\circ + 145^\circ = 575^\circ$$

**Ответ:** 575°.

### № 6

Рассмотрим, какого типа движения совершает робот. Их можно разделить на три типа: разворот на месте, разворот вокруг колеса, проезд прямо.

Движение 3) и 7) – это проезд вперёд (ось мотора **A** повернулась на 360°, ось мотора **B** повернулась на 360°).

Рассчитаем, какой длины прямолинейный отрезок проехал робот.

$$\frac{360^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 = 12 \cdot \pi = 37,68 \text{ (см)}$$

Движение 1) – это проезд вперёд (ось мотора **A** повернулась на 720°, ось мотора **B** повернулась на 720°).

Рассчитаем, какой длины прямолинейный отрезок проехал робот.

$$\frac{720^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 = 24 \cdot \pi = 75,36 \text{ (см)}$$

Движение 2) и 4) – это разворот на месте (ось мотора **A** повернулась на -180°, ось мотора **B** повернулась на 180°).

Рассчитаем угол поворота робота на месте:

$$\frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 = \frac{x}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 12 \\ x = \frac{180^\circ}{12} \cdot 6 = 90^\circ$$

То есть робот развернулся на месте на 90°, при этом колесо **A** движется назад, а колесо **B** движется вперёд.

Движение 6) – это разворот на месте (ось мотора *A* повернулась на  $180^\circ$ , ось мотора *B* повернулась на  $-180^\circ$ ).

Рассчитаем угол поворота робота на месте:

$$\frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 = \frac{x}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 12$$
$$x = \frac{180^\circ}{12} \cdot 6 = 90^\circ$$

То есть робот развернулся на месте на  $90^\circ$ , при этом колесо *A* движется вперёд, а колесо *B* движется назад.

Движение 5) – это поворот робота вокруг колеса (ось мотора *A* повернулась на  $360^\circ$ , а ось мотора *B* повернулась на  $0^\circ$  (колесо *B* было зафиксировано)).

Рассчитаем угол поворота робота вокруг колеса *A*:

$$\frac{360^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 = \frac{x}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 24$$
$$x = \frac{360^\circ}{24} \cdot 6 = 90^\circ$$

То есть робот повернулся вокруг колеса *A* на  $90^\circ$ .

Определим длину дуги, которую вычертил робот:

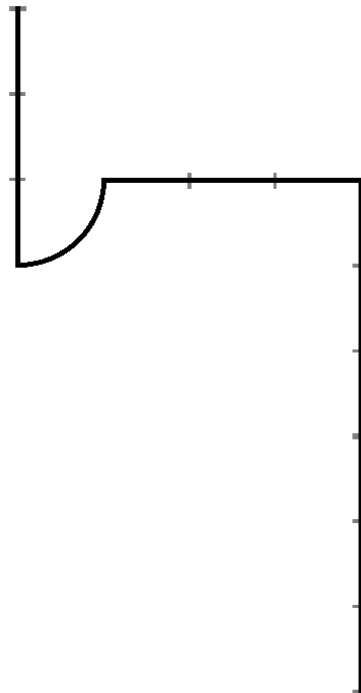
$$\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 12 = 6 \cdot \pi = 18,84 \text{ (см)}$$

Тогда общая длина кривой, вычерченной роботом, будет равна:

$$37,68 \cdot 2 + 75,36 + 18,84 = 169,56 \approx 169,6 \text{ (см)}$$

**Ответ:**

А)



Б) 169,6 см.