

МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ. РОБОТОТЕХНИКА. 2024–2025
УЧ. Г. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Максимальный балл за работу – 50.

Уважаемые участники!

Для задач №1 и №2 достаточно привести только ответ. Для задач с №3 по №6 приведите подробное решение. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Для точного ответа округление стоит производить только при получении финального результата.

1. В попытке участвовали роботы Аз, Буки, Веди, Глаголь, Добро. У роботов два, три, четыре, пять и шесть колёс. Среди роботов нет двух таких, у которых одинаковое число колёс. Известно, что:

- у роботов Добро, Аз и Веди чётное число колёс
- у роботов Аз, Глаголь и Добро на троих 9 колёс
- у роботов Добро и Веди на двоих 10 колёс

Определите, сколько колёс у каждого из роботов. В ответ запишите последовательность заглавных букв, соответствующих первым буквам названий роботов, в порядке *увеличения* числа колёс, например АБВГД.

Ответ: АГДБВ

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

Раз у роботов Добро, Аз и Веди чётное число колёс, значит, у Буки и Глаголь нечётное число колёс. Запишем это в таблицу.

	А	Б	В	Г	Д
2		–		–	
3	–		–		–
4		–		–	
5	–		–		–
6		–		–	

Так как у роботов Добро и Веди на двоих 10 колёс, то у одного из них 4 колеса, а у другого 6 колёс. Значит, у робота Аз – 2 колеса.

Значит, у Глаголь и Добро на двоих 7 колёс. Так как у роботов не может быть 1 колесо, то у Добро 4 колеса, у Глаголь – 3 колеса.

	А	Б	В	Г	Д
2	+	–	–	–	–
3	–	–	–	+	–
4	–	–	–	–	+
5	–		–	–	–
6	–	–		–	–

Значит, у Веди – 6 колёс, а у Буки – 5 колёс.

Расположим первые буквы названий роботов в порядке увеличения числа колёс, от меньшего к большему. Получим ответ АГДБВ.

№ п/п	Критерий	Баллы
1	Приведён верный ответ (АГДБВ)	5
2	Во всех других случаях	0

2. Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами диаметра 9 см. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Ширина колеи равна 2 дм 7 см. Моторы так закреплены на роботе, что если оба мотора повернутся на 10° , то робот поедет прямо вперёд.

Робот выполнил последовательно следующие действия:

- 1) мотор В повернулся на 540° , и при этом мотор А был выключен;
- 2) мотор А повернулся на 270° , и одновременно с этим мотор В повернулся на (-270°);
- 3) мотор В повернулся на 540° , и при этом мотор А был выключен.

Определите, на каком расстоянии от своего первоначального положения оказалась точка, расположенная посередине между колёс, после окончания третьего действия. Ответ дайте в сантиметрах, приведя результат с точностью до целых.

Ответ: 38 см

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

$$2 \text{ дм } 7 \text{ см} = 27 \text{ см}$$

Радиус колеса робота:

$$9 \text{ см} : 2 = 4,5 \text{ см}$$

Обозначим точку, расположенную посередине между колёс, как точку С.

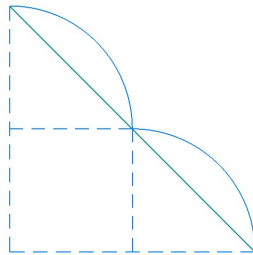
При первом и третьем движении робота точка С будет совершать поворот по дуге радиусом 13,5 см. Угол поворота робота равен:

$$\frac{540^\circ \cdot 4,5}{27} = 90^\circ$$

При втором движении робота точка С будет вращаться на месте вокруг своей оси. Угол поворота робота равен:

$$\frac{270^\circ \cdot 4,5}{27/2} = 90^\circ$$

Изобразим траекторию движения точки С.



Тогда модуль перемещения точки С равен:

$$\sqrt{(27)^2 + (27)^2} = 27\sqrt{2} = 38,1837... \approx 38 \text{ см}$$

№ п/п	Критерий	Баллы
1	Приведён верный ответ (38 см)	5
2	Дан верный ответ, но в неверных единицах измерения	3
3	Во всех других случаях	0

3. Из нескольких шестерёнок и мотора Вася собрал трёхступенчатую передачу. На оси мотора находится шестерёнка с 12 зубьями, на ведомой оси первой ступени – шестерёнка с 20 зубьями, на ведущей оси второй ступени – шестерёнка с 48 зубьями, на ведомой оси второй ступени – шестерёнка с 12 зубьями, на ведущей оси третьей ступени – шестерёнка с 21 зубьями, на ведомой оси передачи – шестерёнка с 12 зубьями.

На ведомую ось передачи Вася посадил сделанные из картона лопасти вентилятора.

А. Определите, во сколько раз ведомая ось передачи вращается быстрее, чем ось мотора. Ответ дайте в виде десятичной дроби.

Ответ: в 4,2 раза быстрее

За верный ответ – 5 баллов.

Б. После включения программы лопасти начали совершать по 7 оборотов за 2 секунды. Определите, сколько оборотов совершит ось мотора за 3 минуты.

Ответ: 150 оборотов

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

Определим, во сколько раз ведомая ось передачи вращается быстрее, чем ось мотора.

$$\frac{12}{20} \cdot \frac{48}{12} \cdot \frac{21}{12} = \frac{12 \cdot 48 \cdot 21}{20 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{21}{5} = 4,2$$

Определим число оборотов, которое совершит ось мотора за две минуты.

$$\frac{7 \cdot 60}{2 \cdot 4,2} \cdot 3 = 150 \text{ (об.)}$$

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (в 4,2 раза быстрее)	5
2	Приведён только верный ответ (в 4,2 раза быстрее)	3
3	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (150 об.)	5
2	Приведён только верный ответ (150 об.)	3
3	В остальных случаях	0

4. Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиус каждого из колёс робота равен 7 см. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Ширина колеи робота равна 24 см.

Посередине между колёс робота закреплена кисть. Робот с помощью кисти начертил трапецию АВСЕ, $AB = CE$. При проезде по стороне АВ оси моторов повернулись на 4500° . При проезде по стороне ВС каждое из колёс совершило на 2 оборота меньше, чем при проезде по стороне АВ. При проезде по стороне АЕ каждое из колёс совершило в 2 раза больше оборотов, чем при проезде по ВС.

А. Определите длину стороны АЕ. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых.

Ответ: 923 см

За верный ответ – 5 баллов.

Б. Определите площадь четырёхугольника АВСЕ. Ответ дайте в квадратных дециметрах, округлив результат до целых.

Ответ: 3453 дм²

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

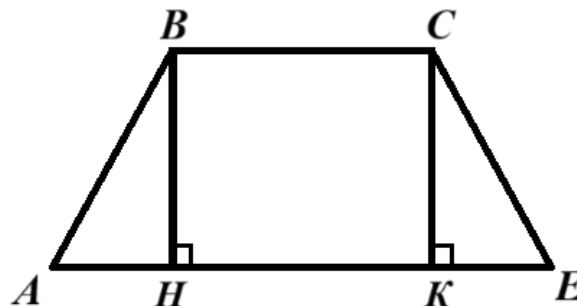
Рассчитаем длины сторон равнобедренной трапеции АВСЕ.

$$AB = CE = \frac{4500^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 7 = 175\pi \text{ (см)}$$

$$BC = 175\pi - 2 \cdot 2\pi \cdot 7 = 147\pi \text{ (см)}$$

$$AE = 2 \cdot 147\pi = 294\pi = 923,16 \approx 923 \text{ (см)}$$

Сделаем рисунок, опустим высоты ВН и СК.



$$AH = (AE - BC)/2 = 147\pi/2 = 73,5\pi$$

$$BH = \sqrt{(175\pi)^2 - (73,5\pi)^2} = \pi\sqrt{25222,75} \text{ (см)}$$

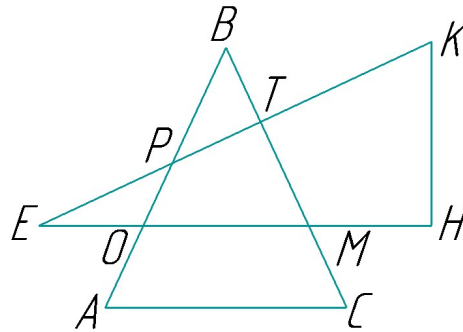
Площадь трапеции равна:

$$\frac{147\pi + 294\pi}{2} \cdot \pi\sqrt{25222,75} = 345274,1840\dots(\text{см}^2)$$

$$345274,1840\dots\text{см}^2 \approx 3452,741840\dots\text{дм}^2 \approx 3453\text{ дм}^2$$

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (923 см)	5
2	Приведён только верный ответ (923 см)	3
3	Ответ приведён не с требуемой точностью	-1
4	Ответ приведён не в требуемых единицах измерения	-1
5	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (3453 дм ²)	5
2	Приведён только верный ответ (3453 дм ²)	3
3	Ответ приведён не с требуемой точностью	-1
4	Ответ приведён не в требуемых единицах измерения	-1
5	В остальных случаях	0

5. Робот-чертёжник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение (см. *Рисунок*) при помощи кисти, закреплённой посередине между колёс.



Рисунок

Известно, что $AB = BC$, $KH \perp EH$, $BC \perp EK$, $EH \parallel AC$, $\angle BPE = 130^\circ$.

Все повороты робот должен совершать на месте. Робот не может ехать назад. Робот должен проехать по каждому отрезку траектории ровно по одному разу.

А. Определите величину угла В. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 40°

За верный ответ – 5 баллов.

Б. Определите минимальный суммарный угол поворота робота, на который он должен повернуться при проезде по всей траектории. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 660°

За верный ответ – 5 баллов.

Справочная информация

Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление поворотов робота не учитывается.

Решение

Чтобы определить угол поворота робота, надо определить градусные меры углов.

$$\angle TPO = \angle BPT = 130^\circ$$

$$\angle BPT = \angle EPO = 180^\circ - \angle BPT = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

$$\text{Так как } BC \perp EK, \text{ то } \angle BTP = 90^\circ. \text{ Тогда } \angle ABC = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$$

$$\text{Так как } AB = BC, \text{ то } \angle A = \angle C = (180^\circ - \angle B) : 2 = 70^\circ.$$

$$\angle BOM = \angle BAC = \angle BCA = \angle BMO = 70^\circ.$$

$$\text{Так как } EH \parallel AC, \text{ то } \angle AOM = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ = \angle OMC.$$

$$\angle EOP = \angle AOM = 110^\circ.$$

$$\text{Значит, } \angle PEO = 180^\circ - (110^\circ + 50^\circ) = 20^\circ.$$

Тогда $\angle EKH = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

Сумма углов поворота робота зависит от точки старта. Направление обхода траектории не имеет значения. По условию задачи робот не может ехать назад.

В качестве точки старта выгоднее всего выбрать вершину угла, градусная мера которого минимальна из указанных углов, то есть выгоднее всего стартовать в вершине E.

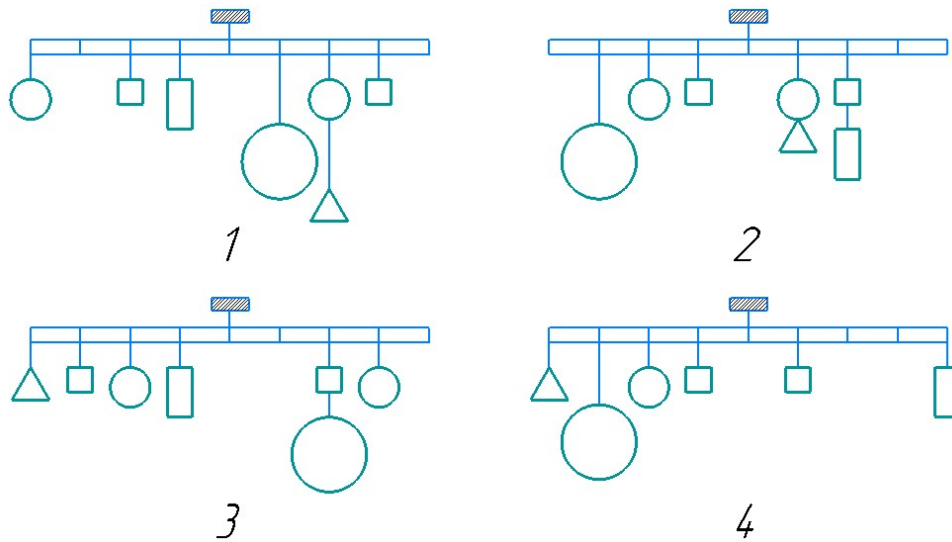
Чтобы минимизировать угол поворота, мы будем проезжать через вершины O, T, M насквозь, не останавливаясь и не поворачиваясь в них. При этом нам достаточно повернуться дважды в вершине P, чтобы перейти от вычерчивания одного треугольника к вычерчиванию второго треугольника. В данном случае вершина P выбрана из расчёта, что угол поворота в ней будет минимальным и равен градусной мере $\angle BPT = 50^\circ$. Посещать вершины мы будем в следующем порядке E – P – B – C – A – P – K – H – E. Для обратного порядка посещения вершин решение будет тем же.

Посчитаем градусную меру минимального суммарного угла поворота.

$$50^\circ + (180^\circ - 40^\circ) + (180^\circ - 70^\circ) + (180^\circ - 70^\circ) + \\ + 50^\circ + (180^\circ - 70^\circ) + (180^\circ - 90^\circ) = 660^\circ.$$

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (40°)	5
2	Приведён только верный ответ (40°)	3
3	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (660°)	5
2	Приведён только верный ответ (660°)	3
3	В остальных случаях	0

6. В наборе есть два шара разного размера, несколько одинаковых кубов, несколько одинаковых треугольных пирамид и несколько одинаковых прямоугольных параллелепипедов. С помощью равноплечных весов (упругую балку подвесили на штатив) элементы из набора смогли уравновесить. Произвели четыре взвешивания (см. *Взвешивания*).



Взвешивания

Для удобства использования весов поперёк балки сделали засечки, расположенные на равном расстоянии друг от друга.

Масса одной пирамиды равна 5 г. Масса балки равномерно распределена вдоль всей балки и равна 100 г. Массой крепёжных элементов можно пренебречь.

А. Определите массу куба. Ответ дайте в граммах.

Ответ: 165 г

За верный ответ – 5 баллов.

Б. Определите массу шара большего размера. Ответ дайте в граммах.

Ответ: 120 г

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

Балка разделена засечками на равные части. Так как длина рычага не имеет значения, а важно только соотношение между длинами плечей, то при записи условия равновесия рычага будем измерять плечи в количестве частей.

Так как масса балки распределена равномерно по балке, то, чтобы её учесть, добавим массу в виде дополнительного груза в геометрический центр балки. Так как балка подвешена за середину, то можно не учитывать массу балки, так как её плечо будет равно 0.

Обозначим массу куба за x , обозначим за y массу меньшего шара, обозначим за z массу большего шара, обозначим за m массу параллелепипеда и составим уравнения.

$$\begin{aligned}4y + 2x + m &= z + 2y + 2 \cdot 5 + 3x \\3z + 2y + x &= y + 5 + 2x + 2m \\4 \cdot 5 + 3x + 2y + m &= 2x + 2z + 3y \\4 \cdot 5 + 3z + 2y + x &= x + 4m\end{aligned}$$

Упростим уравнения.

$$\begin{aligned}x - 2y + z - m &= -10 \\x - y - 3z + 2m &= -5 \\x - y - 2z + m &= -20 \\2y + 3z - 4m &= -20\end{aligned}$$

Решим данные уравнения в системе и получим, что:

$$x = 165, y = 80, z = 120, m = 135.$$

Массу куба равна 165 г, масса меньшего шара равна 80 г, масса большего шара равна 120 г, масса параллелепипеда равна 135 г.

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (165 г)	5
2	Приведён только верный ответ (165 г)	3
3	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (120 г)	5
2	Приведён только верный ответ (120 г)	3
3	В остальных случаях	0

Максимальный балл за работу – 50.